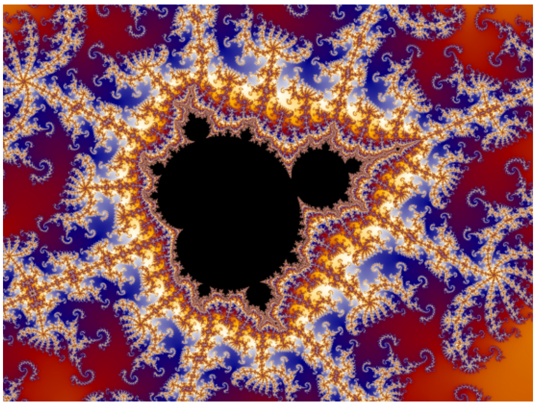
Mandelbrot- és Júlia-halmazokról

TrueY

2011. szeptember 17.

1. Bevezetés

1986-ben, amikor a Tudomány című újság, a Scientific American magyar kiadása indult, a címoldalán egy gyönyörű, színpompás ábra, egy Mandelbrot-halmaz volt látható.



Rövid leírás következett az előállításának algoritmusáról. Az algoritmusban van egy lépés, ami azt állítja, hogy egy komplex szám bizonyosan nem eleme a Mandelbrot-halmaznak, ha a belőle képzett rekurzív sor bármely elemének nagysága nagyobb, mint 2. Rögvest felmerült bennem a kérdés, hogy miért pont 2? Később olvastam Roger Penrose egy könyvét (l. [2, 147. o. alja]), amelyben – sok mással egyetemben – foglalkozik a Mandelbrot-halmazzal is. Ott azt állítja, hogy ez a korlát $1 + \sqrt{2}$. Ugyanebben a könyvben a 2-es korlát is említésre kerül. Ismét felmerül hát a kérdés, hogy mennyi és miért annyi, amennyi?

Ebben a cikkben foglalom össze annak bizonyítását, hogy miért 2 ez a korlát (l. az 5. fejezetben).

Több esetben is írtam Mandelbrot-halmazt generáló programot. A legelsőt Sinclair QL-re (emlékszik valaki erre a szuper gépre?). Később, 2001-ben az egyik kollégám (Amorphka) írt Intel 80386/387 processzorra, DOS alá egy programot assembler nyelven, ami az FPU felhasználásával számolta és rajzolta ki a Mandelbrot-halmazt. A lefordított com file hossza 191 byte volt. Látható volt, hogy ennél lehet kisebb kódot is írni. Ebből végül is sikerült egy 100 byte-os programot készíteni (l. a 7. fejezetben).

Mind e közben az is felmerült, hogy a számításokat egy nyomtató is elvégezheti. Erre a PostScript megfelelő nyelvnek tűnt. 2004-ben munkám során beleolvastam a PostScript programozási nyelv leírásába (l. [3]) és kb. a 80. oldalig kellett eljutnom, hogy 20 sorban megírjam a programot (l. a 8. fejezetben).

2006-ban egy JAVA Applet-et is készítettem, amely a Mandelbrot- és Júlia-halmazokat rajzolja ki. Sajnos az évek során ez a meglehetősen egyszerű Applet eltűnt. De nem is nagy kár érte. Talán egyszer majd újra írom, de a neccen annyi Mandelbrot rajzoló program akad, hogy teljesen felesleges még egy lassú JAVA-s is. Erőimet inkább a GTK-s, GMP-s verzióra fókuszálom.

2007-ben, egy megfázás alkalmával ismét elkezdtem írni ezt a dokumentumot és akkor jutott eszembe, hogy a Mandelbrot- és Júlia-halmazokat ki lehetne terjeszteni Hiperkomplex számokra is (l. [1]). Ekkor az eredeti komplex halmaz csak egy 2 dimenziós alterét jelenti a tetszőleges n dimenziós hiperkomplex halmazoknak. Ezekről az kiterjesztett halmazokról a 9. fejezetben fogok néhány szót ejteni.

Nagyjából ennyi a története ennek a dokumentumnak. Remélem néhányan hasznosnak találják! Jó olvasást!

Ha bármilyen heJe sírási, sajtóhUbát, vagy levezetési problémát talál, kérem jelezze azt nekem!

2. Komplex számok

Azoknak, akik nem ismerősek a komplex számok világában igyekszem röviden bemutatni, hogy hogyan is képződnek (l. [1], [4]).

A valós számok halmazán nem megoldható az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet, de a

$$\sqrt{-1} = \boldsymbol{i}$$

jelölés bevezetésével szimbolikusan megoldhatóvá válik. Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{i}^2 = -1$, $\boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}^4 = 1$, $\boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}$ stb. Ezzel a jelöléssel képezhetünk egy komplex számot. Egy tetszőleges komplex számot jelöljük z-vel, amely két részből áll: egy valós (a), és egy képzetes részből ($b\boldsymbol{i}$)

$$z = a + b\boldsymbol{i}.$$

Ha a komplex számokat egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor egy vektort kapunk. Az abszcissza tengelyre mérjük fel a valós és az ordináta tengelyre a képzetes részt. A vektor és az abszcissza pozitív félegyenese által bezárt szöget jelölje φ (úgy, hogy a $\varphi = +90°$ az ordináta tengely pozitív félegyenese irányába mutat), a komplex vektor hosszát pedig jelölje $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ekkor így is felírhatjuk a komplex számot:

$$z = |z| \cos\varphi + \boldsymbol{i} \, |z| \sin\varphi = |z| \, e^{\boldsymbol{i}\varphi}.$$

Két komplex szám összege:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1\boldsymbol{i}) + (a_2 + b_2\boldsymbol{i}) = \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\boldsymbol{i}, \end{aligned}$$

szorzata:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1\boldsymbol{i})(a_2 + b_2\boldsymbol{i}) = \\ &= a_1a_2 + a_1b_2\boldsymbol{i} + b_1a_2\boldsymbol{i} + b_1b_2\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} = \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\boldsymbol{i} = \\ &= |z_1| \, e^{\boldsymbol{i}\varphi_1} \, |z_2| \, e^{\boldsymbol{i}\varphi_2} = \\ &= |z_1| \, |z_2| \, e^{\boldsymbol{i}(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

A komplex számokkal végzett összeadás és szorzás kommutatív és asszociatív. A szorzás pedig disztributív az összeadásra nézve.

Bevezetjük a konjugálás műveletét:

$$\overline{z} = a - b\boldsymbol{i} = |z| \, e^{-\boldsymbol{i}\varphi}.$$

Ekkor az alábbi összefüggései igazak:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \, \overline{z_2}, \\ z\overline{z} &= a^2 + b^2 = |z|^2, \\ z + \overline{z} &= 2a, \\ z - \overline{z} &= 2b\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

Még egy hasznos jelölést vezetünk be: $Re(z) = a = |z| \cos\varphi$, amire nyilvánvalóan igaz, hogy

$$-|z| \le Re(z) \le |z| \, . \tag{1}$$

3. Mandelbrot-halmaz definíciója

Most már minden szükségeset tudunk a komplex számokról és a velük végezhető műveletekről.

Definiáljuk a Mandelbrot-halmazt. A halmazt jelöljük $\mathbb{M}$-mel. Vegyünk egy tetszőleges z_0 komplex számot és képezzük az alábbi rekurzív komplex sorozatot minden $n \geq 0$ egész számra.

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0. \tag{2}$$

Egy z_0 komplex szám eleme a Mandelbrot-halmaznak, ha a z_n sorozat korlátos, azaz $z_0 \in \mathbb{M}$, ha $\exists P > 0$, amelyre igaz, hogy $\forall n \geq 0$, esetén $|z_n| < P$.

Megjegyzés: A sorozatot $z_{n+1} = z_n^2 + c$ formában szokás felírni. Én itt a Júlia-halmazokkal való különbség kiemelése érdekében mégis inkább a (2) egyenlet szerinti jelölést használom.

4. Júlia-halmaz definíciója

Definiáljuk a Júlia-halmaz elemeit. A halmazt jelöljük $\mathbb{J}_c$-vel. Válasszunk egy c komplex konstanst és tetszőleges z_0 kezdőértékkel képezzük az alábbi rekurzív komplex sorozatot minden $n \geq 0$ egész számra.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Egy z_0 komplex szám eleme a Júlia-halmaznak, ha a z_n sorozat korlátos, azaz $z_0 \in \mathbb{J}_c$, ha $\exists P > 0$, amelyre igaz, hogy $\forall n \geq 0$, esetén $|z_n| < P$.

A Mandelbrot- és Júlia-halmazok képzése nagyban hasonlít egymásra. A lényeges különbség az, hogy míg egyetlen Mandelbrot-halmaz létezik, addig c konstans változtatásával végtelen számú Júlia-halmazt képezhetünk.

5. Bizonyítás

A bizonyítás előtt vizsgáljuk meg, hogy milyen hosszúságú a sorozat következő eleme.

5.1. Mandelbrot-halmaz elemeinek nagyságának becslése

5.1.1 Lemma: *A sorozat következő elemének nagysága alulról becsülhető a*

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |z_0|. \tag{3}$$

egyenlőtlenséggel

Bizonyítás: Írjuk fel a sorozat következő elemének hosszát.

$$\begin{aligned} |z_{n+1}|^2 &= z_{n+1}\overline{z_{n+1}} = \\ &= (z_n^2 + z_0)\overline{(z_n^2 + z_0)} = \\ &= z_n^2\overline{z_n^2} + z_n^2\overline{z_0} + \overline{z_n^2}z_0 + z_0\overline{z_0} = \\ &= |z_n|^4 + 2Re(z_n^2\overline{z_0}) + |z_0|^2 = \\ &= |z_n|^4 + 2\,|z_n|^2\,|z_0|\,cos(2\varphi_n - \varphi_0) + |z_0|^2. \end{aligned}$$

Mivel $cos(\varphi) \in [-1, 1]$, ezért

$$\begin{gathered} |z_n|^4 + 2\,|z_n|^2\,|z_0| + |z_0|^2 \geq \\ \geq |z_{n+1}|^2 \geq \\ |z_n|^4 - 2\,|z_n|^2\,|z_0| + |z_0|^2, \end{gathered}$$

azaz

$$(|z_n|^2 + |z_0|)^2 \geq |z_{n+1}|^2 \geq (|z_n|^2 - |z_0|)^2.$$

A jobb oldalon álló egyenlőtlenségből gyököt vonhatunk. Mivel $|z_{n+1}|$-re csak a nem negatív érték jöhet szóba, ezért amennyiben $|z_n|^2 \geq |z_0|$, akkor

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |z_0|. \quad \blacksquare$$

Az egyenlőtlenség természetesen akkor is igaz, ha $|z_n|^2 < |z_0|$, de akkor a jobb oldalon negatív szám szerepel és a későbbiekben nem lenne alkalmazható a sorozat alul becslésére.

5.2. Mandelbrot-halmaz korlátossága

A bizonyítandó állítás tehát: Ha $\exists N > 0 (N \in \mathbb{N})$, amelyre igaz, hogy $|z_N| > 2$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty,$$

azaz $z_0 \notin \mathbb{M}$.

Két lépésben történik a bizonyítás. Az elsőben a $|z_0| > 2$ esetre bizonyítom (1-3. lépés) és utána a $|z_0| \leq 2$ esetre.

Egy megjegyzés: $z_0 = -2$ kiindulási értékkel a $\forall n > 0$-ra a $z_n = 2$ konstans elemű sorozat képződik. Tehát $-2 \in \mathbb{M}$.

5.2.1 Állítás: *$\forall |z_0| > 2$ esetén $\forall n > 0$-ra $|z_n| > |z_0|$.*

Bizonyítás: A bizonyítás teljes indukcióval fog történni.

n=1 esetre könnyen belátható a $|z_1| > |z_0|$ egyenlőtlenség. A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz (mivel $|z_0|^2 > |z_0| > 2$), tehát a vizsgált egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést alulról becsülhetjük. Azaz $|z_1| \geq |z_0|^2 - |z_0| > |z_0|$. A jobb oldali egyenlőtlenséget átrendezve $|z_0|^2 > 2|z_0|$. Egyszerűsítve $|z_0|$-lal, $|z_0| > 2$, ez pedig a kiindulási feltétel, azaz minden esetben igaz.

Tegyük fel, hogy n-re igaz, azaz $|z_n| > |z_0|$. Vizsgáljuk meg, hogy n+1 esetre is igaz-e, azaz $|z_{n+1}| > |z_0|$.

A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz ($|z_n|^2 > |z_0|$) , ezért a bizonyítandó sorozat elem alulról becsülhető: $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |z_0| > |z_0|$. A jobb oldali egyenlőtlenség átrendezés után $|z_n|^2 > 2|z_0|$. Ez nyilvánvalóan igaz, mivel $|z_n| > |z_0| > 2$. ■

5.2.2 Állítás: *$\forall |z_0| > 2$ esetén $\forall n > 0$-ra $|z_{n+1}| > |z_n|$.*

Bizonyítás: A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz , ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát alulról becsülhetjük: $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |z_0| > |z_n|$. A jobb oldali egyenlőtlenséget átrendezve $|z_n|^2 > |z_n| + |z_0|$. Az 5.2.1. állítás miatt a jobb oldalt felülről becsüljük, ha $|z_0|$, helyett $|z_n|$-et helyettesítünk. Ekkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk: $|z_n|^2 > 2|z_n|$, azaz $|z_n| > 2$. Ez pedig a $|z_n| > |z_0| > 2$ miatt nyilvánvalóan igaz. ■

5.2.3 Állítás: *$\forall |z_0| > 2$ esetén $\forall n > 0$-ra $|z_{n+1}| - |z_n| \geq 2(|z_0| - 2)$, ami minden esetben > 0.*

Bizonyítás: A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát alulról becsülhetjük: $|z_{n+1}| - |z_n| \geq |z_n|^2 - |z_0| - |z_n| \geq 2(|z_0| - 2)$. A jobb oldali egyenlőtlenség bal oldala alulról becsülhető, ha $|z_0|$ helyére $|z_n|$-et helyettesítünk, azaz $|z_n|^2 - 2|z_n| = |z_n|(|z_n| - 2) \geq 2(|z_0| - 2)$. Ez nyilvánvalóan igaz, mivel $|z_n| > |z_0| > 2$. ■

Az 5.2.3. állításból következik, hogy a sorozat minden két szomszédos eleme közötti különbség alulról becsülhető egy nullától különböző pozitív számmal. Tehát

$$\forall |z_0| > 2\text{-re} \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \qquad (4)$$

Most pedig lássuk a bizonyítást arra az esetre, amikor $|z_0| \leq 2$ és $\exists N > 0 (N \in \mathbb{N})$-re $|z_N| > 2$.

5.2.4 Állítás: *Ha $|z_0| \leq 2$ és $\exists N > 0$, amelyre $|z_N| > 2$, akkor $\forall n \geq N$-re $|z_n| > 2$.*

Bizonyítás: A bizonyítás teljes indukcióval fog történni.

$n = N$-re tehát $|z_n| > 2$.

$n = N + 1$ esetre könnyen belátható. A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz ($|z_N|^2 > 4 > |z_0|$), ezért az $|z_{N+1}| \geq |z_N|^2 - |z_0| > 2$ egyenlőtlenség írható fel. A jobb oldali egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk $|z_N|^2 > 2 + |z_0|$. Mivel $|z_N| > 2 \geq |z_0|$, ezért ez nyilvánvalóan igaz.

Ebből következik, hogy minden $n > N$-re is igaz. ∎

5.2.5 Állítás: *Ha $|z_0| \leq 2$ és $\exists N > 0$, amelyre $|z_N| > 2$, akkor $\forall n \geq N$-re $|z_{n+1}| > |z_n|$.*

Bizonyítás: A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát alulról becsülhetjük, azaz a $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |z_0| > |z_n|$ egyenlőtlenség írható fel. A jobb oldali egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy $|z_n|^2 > |z_n| + |z_0|$. Mivel $|z_n| > 2 \geq |z_0|$, ezért ez nyilvánvalóan igaz. ∎

5.2.6 Állítás: *Ha $|z_0| \leq 2$ és $\exists N > 0$, amelyre $|z_N| > 2$, akkor $\forall n \geq N$-re $|z_{n+1}| - |z_n| > 2(|z_N| - 2)$.*

Bizonyítás: A (3) egyenlőtlenség alkalmazhatósági feltétele igaz, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést alulról becsülhetjük: $|z_{n+1}| - |z_n| \geq |z_n|^2 - |z_0| - |z_n| > 2(|z_N| - 2)$ egyenlőtlenség írható fel. A jobb oldali egyenlőtlenséget alulról tudjuk becsülni, ha $|z_0|$ helyére $|z_n|$-et helyettesítünk. $|z_n|^2 - 2\,|z_n| = |z_n|\,(|z_n| - 2) > 2(|z_N| - 2)$ Mivel $|z_n| > |z_N| > 2$, ezért ez igaz. ∎

Az 5.2.6. állításból következik, hogy ha valamely $|z_0| \leq 2$-re $\exists N > 0$, amelyre igaz, hogy $|z_N| > 2$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \qquad (5)$$

A (4) és az (5) egyenletek alapján elmondható, hogy ha egy sorozat tetszőleges elemére igaz, hogy $|z_n| > 2$, akkor biztos, hogy az ehhez a sorozathoz tartozó $z_0 \notin \mathbb{M}$.

5.3. Júlia-halmaz korlátossága

Ha $|c| \leq 2$, akkor a bizonyítás megegyezik a Mandelbrot-halmaznál látott 5.2.4., 5.2.5. és 5.2.6. állítások lépéseivel (z_0-at c-vel való helyettesítés után). Azt várhatnánk, hogy $|c| > 2$ esetén egyetlen z_0-ra sem lesz korlátos a sorozat. Furcsa mód ez nem igaz!

5.3.1 Állítás: *$\forall c$ komplex számhoz létezik z_0 komplex szám, amelyre igaz, hogy $z_0 \in \mathbb{J}_c$.*

Bizonyítás: Elegendő egyetlen ilyen számot találnunk a bizonyításhoz. Keressük azt a z_0 komplex számot, amelyre $z_1 = z_0$, azaz $z_0^2 + c = z_0$. Ekkor $\forall n > 0$-ra igaz, hogy $z_n = z_1 = z_0^2 + c$, azaz a sorozat korlátos. Nyilvánvaló, hogy ha z_0-ra igaz, akkor $-z_0$-ra is igaz lesz az egyenlet. Tehát meg kell oldanunk $z_0^2 + c = \pm z_0$ egyenletet. Átrendezve $z_0^2 \mp z_0 + c = 0$.

$$z_{0_{1,2,3,4}} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$ ∎

Feltehetjük az a kérdést is, hogy létezik-e olyan korlát $|z_n|$-re, amelynél nagyobb sorozat tagnál a sorozat többi eleme biztosan minden határon túl nő. A $|c|$ korlát viszonylag könnyen bizonyítható az 5.2.1. - 5.2.3 analógiájára. Az 5.3.1. állításból kiindulva vizsgáljuk meg a

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4\,|c|}}{2}$$

korlátot.

5.3.2 Állítás: *Ha $|c| > 2$ és $\exists N > 0$, amelyre $|z_N| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, akkor $|z_{N+1}| > |z_N|$.*

Bizonyítás: Mivel $|z_N| > \sqrt{|c|}$, ezért alkalmazható a (3) egyenlőtlenség a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalának alul becslésére. $|z_{N+1}| \geq |z_N|^2 - |c| > |z_N|$. A jobb oldali egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy igaz, ha $|z_N|^2 - |z_N| - |c| > 0$, azaz $|z_N|_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4|c|}}{2}$. Csak a pozitív megoldás a helyes, ezért adódik az állítás feltétele $|z_N| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$. ■

Mivel $\forall n > N$-re az előző állítás kiindulási feltételei igazak, ezért ha átlépjük ezt a korlátot, akkor szigorúan monoton növekvő sorozatot kapunk.

5.3.3 Állítás: *Ha $|c| > 2$ és $\exists N > 0$, amelyre $|z_N| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, akkor $\forall n > N$-re $|z_{n+1}| - |z_n| > |z_N|\,(|z_N| - 1) - |c|$.*

Bizonyítás: Mivel $\forall n > N$-re $|z_n| > \sqrt{|c|}$, ezért alkalmazható a (3) egyenlőtlenség a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalának alulról történő becslésére.

$$|z_{n+1}| - |z_n| \geq |z_n|^2 - |c| - |z_n| = |z_n|\,(|z_n| - 1) - |c|\,. \tag{6}$$

Mivel $|z_n|$ szigorúan monoton növekvő sorozat, ezért a (6) egyenlőtlenség szerint a szomszédos elemek különbségeiből képzett sorozat is szigorúan monoton sorozatot alkot. Ennek nyilvánvaló alsó korlátja $|z_N|\,(|z_N| - 1) - |c|$. ■

Az 5.3.3 állításból pedig az következik, hogy maga a sorozat minden határon túl nő, azaz ha $|c| > 2$ és $\exists N > 0$, amelyre $|z_N| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty.$$

6. Általános megjegyzések

6.1. Mandelbrot-halmaz tengelyesen szimmetrikus

6.1.1 Állítás: *Ha $z_0 \in \mathbb{M}$, akkor $\overline{z_0} \in \mathbb{M}$, azaz a Mandelbrot-halmaz szimmetrikus a valós tengelyre.*

Bizonyítás: Definíció alapján $z_1 = z_0^2 + z_0$, ekkor ha $\overline{z_0}$-ból kiindulva $z_1' = \overline{z_0}^2 + \overline{z_0} = \overline{z_0^2} + \overline{z_0} = \overline{z_0^2 + z_0} = \overline{z_1}$. Teljes indukcióval pedig könnyű belátni, hogy ez bármely n-re is igaz. ■

6.2. Júlia-halmazok centrálisan szimmetrikusak

6.2.1 Állítás: *Ha $z_0 \in \mathbb{J}_c$, akkor $-z_0 \in \mathbb{J}_c$, azaz minden Júlia-halmaz origóra szimmetrikus.*

Bizonyítás: Helyettesítsük be $-z_0$-at a Júlia-halmazt definiáló sorozatba, azaz $z_1' = (-z_0)^2 + c = z_0^2 + c = z_1$. A $-z_0$-val induló sorozat összes többi eleme ugyanaz, mint a z_0-lal induló sorozat. ■

6.3. Minden $\mathbb{J}_c$ Júlia-halmaz és $\mathbb{J}_{\overline{c}}$ párja tengelyesen szimmetrikusak

6.3.1 Állítás: *Ha $z_0 \in \mathbb{J}_c$, akkor $\overline{z_0} \in \mathbb{J}_{\overline{c}}$, azaz minden c-vel képzett Júlia-halmaznak van egy valós tengelyre szimmetrikus párja.*

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg a $z_1' = \overline{z_0}^2 + \overline{c}$ elemet. A konjugáltakra igaz azonosságok felhasználásával könnyen belátható, hogy $z_1' = \overline{z_0}^2 + \overline{c} = \overline{z_0^2} + \overline{c} = \overline{z_0^2 + c} = \overline{z_1}$. Tegyük fel, hogy valamely $n > N$-re igaz, hogy $z_n' = \overline{z_n}$. Ekkor $z_{n+1}' = z_n'^2 + \overline{c} = \overline{z_n}^2 + \overline{c} = \overline{z_n^2} + \overline{c} = \overline{z_n^2 + c} = \overline{z_{n+1}}$. ■

7. Assembly program

A program legutolsó verziója sajnos elkallódott, de a 101 byte-os verziónak a forrása megtekinthető az internet egy kies bugyrában. Mandelbrot halmaz kirajzolása x86 Assemblerben

8. PostScript program

Engedjük, hadd számoljon a nyomtató. Mandelbrot halmaz kirajzolása PostScript-ben

9. Mandelbrot- és Júlia halmazok általánosítása

9.1. Egyéb rekurzív függvények

Az egyik kézenfekvő megoldás, hogy más rekurzív sorozatot választunk ([5], [6]). Ilyen lehet a $z_{n+1} = z_n^d + c$, ahol d (például) egy egész szám. Esetleg $z_{n+1} = z_n^3 + 3kz_n + c$. Használhatunk egyén komplex argumentumú függvényeket is $(sin(z), log(z)$ stb.).

Általában vegyünk egy c komplex paramétertől függő függvénycsaládot. Ekkor az általánosított Mandelbrot- és Júlia-halmazokhoz jutunk.

$$z_{n+1} = f_c(z_n)$$

Ha c a változó és $z_0 = c$ a rekurzió indító eleme, akkor egy Mandelbrot-halmazt kapunk. Ha c egy konstans és z_0 a változó, akkor pedig egy Júlia-halmazt [1].

[1] forrás: hu.wikipedia.org

9.2. Egyéb számrendszerek

A komplex számok képzésénél a szorzást úgy definiáltuk, hogy $\boldsymbol{ii} = -1$. De lehetne tetszőleges $\boldsymbol{ii} = a + b\boldsymbol{i}$ alakú is.

Igazolható, hogy az általános definíció 3 féle eltérő rendszerhez vezet:

$$\boldsymbol{ii} = -1 - \text{komplex számok}$$
$$\boldsymbol{ii} = 0 - \text{Study-féle számok}$$
$$\boldsymbol{ii} = 1 - \text{hiperbolikus komplex számok}$$

9.3. Hiperkomplex számok

A komplex számokat kiterjeszthetjük egy újabb szimbolum hozzáadásával. Ekkor az alábbi alakú számot kapjuk:

$$z = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}.$$

Az összeadás és a valós számmal való szorzás a szokásos alakú. A hiperkomplex számok szorzásánál meg kell adnunk a szimbolumok szorzásának eredményét

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ii} &= a_{ii} + b_{ii}\boldsymbol{i} + c_{ii}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{ij} &= a_{ij} + b_{ij}\boldsymbol{i} + c_{ij}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{ji} &= a_{ji} + b_{ji}\boldsymbol{i} + c_{ji}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{jj} &= a_{jj} + b_{jj}\boldsymbol{i} + c_{jj}\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Általános esetben egy n képzetes tagból álló hiperkomplex szám

$$z = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{i}_j,$$

és definiálni kell a szorzótáblát is. Minden $k, l \in \{1, \dots, n\}$-re

$$\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_l = p_{kl,0} + \sum_{j=1}^{n} p_{kl,j} \boldsymbol{i}_j.$$

Két kitüntetett hiperkomplex rendszer van. Az egyik a kvaterniók.

$$\begin{aligned} z &= a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}, \text{ ahol} \\ \boldsymbol{i}^2 &= \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 \text{ és} \\ \boldsymbol{i}\boldsymbol{j} &= -\boldsymbol{j}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{k} &= -\boldsymbol{k}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{k}\boldsymbol{i} &= -\boldsymbol{i}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

A másik a Cayley-számok. Itt 7 elemből áll a képzetes rész.

Megjegyzés: Igazolható, hogy csak a valós számok, komplex számok, kvaterniók és Cayley-számok halmazán végezhető el az osztás művelete ([1]).

9.4. Algebrák

Általános esetben egy n dimenziós algebrában értelmezhető számot jelölje

$$z = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{i}_j,$$

Az algebrákban csak az összeadás, valós számmal való szorzás, illetve két szám szorzása van definiálva. A szorzáshoz definiálni kell a szorzótáblát. Minden $k, l \in \{1, ..., n\}$-hoz tartozó szimbolumra

$$\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_l = \sum_{j=1}^{n} p_{kl,j} \boldsymbol{i}_j.$$

Ennyi pont elegendő a polinomiális Mandelbrot- és Júlia-halmazok képzéséhez.

A hiperkomplex számok az algebrák egy speciális részosztálya. Ezek az úgynevezett egységelemes algebrák. Ezekben létezik egy egységelem (jelölje ez $\boldsymbol{i}_1$), amelykre igaz, hogy minden $j \in \{2, \dots, n\}$-re $\boldsymbol{i}_1 \boldsymbol{i}_j = \boldsymbol{i}_j \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_j$.

A hiperkomplex számokról és az algebrákról bővebben a [1]-ban olvashatunk.

Természetesen minden választott algebrához külön meg kell találni, hogy egy adott elem mikor biztosan nem eleme, vagy mikor biztosan eleme az adott halmaznak.

Hivatkozások

[1] Kantor, Iszaj Lvovics - Szolodovnyikov, Alexandr Szamuilovics: *Hiperkomplex számok*, Gondolat, Budapest, 1985 (antikvarium.hu)

[2] Penrose, Roger: *A császár új elméje - Számítógépek, gondolkodás és a fizika törvényei*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993 (antikvarium.hu)

[3] *PostScript Language Tutorial and Cookbook*, Adobe Systems Incorporated, 1985 (BlueBook.pdf)

[4] *Komplex számok*, hu.wikipedia.org

[5] *Mandelbrot set*, en.wikipedia.org

[6] *Mandelbrot-halmaz*, hu.wikipedia.org